ÜBER DIE ERHALTUNGSSÄTZE DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES IN BEWEGTEN DIELEKTRIKEN

Von J. I. HORVÁTH und J. GYULAI
Institut für Theoretische Physik der Universität Szeged
(Eingegangen am 11. Juni 1956)

Die Erhaltungssätze des elektromagnetischen Feldes in Dielektriken werden durch infinitesimale Transformationen von dem gewöhnlichen Variationsprinzip mit der LAGRANGEschen Dichte

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{|g|} + \frac{1}{2} \Phi_\mu \partial_\nu (M^{\mu\nu} \sqrt{|g|})$$

abgeleitet. Es werden weiterhin die Probleme, die mit dem Energie-Impulstensor des Feldes zusammenhängen, neu beleuchtet.

§ 1. *Einleitung*

Bekannterweise lassen sich die MINKOWSKIschen Feldgleichungen bewegter Körper im stromfreien Falle in der Form

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0, \tag{1, 1}$$

oder im pseudoeuklidischen Raum, mit dem metrischen Grundtensor

$$\gamma_{00} = -\gamma_{11} = -\gamma_{22} = -\gamma_{33} = 1, \quad \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu,$$
$$\gamma = \det |\gamma_{\mu\nu}| = -1$$

in der Form

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0 \tag{1, 2}$$

angeben, und von dem Variationsprinzip

$$\delta \int \mathfrak{L}' \, d^4 x = 0 \tag{1, 3}$$

mit der LAGRANGEschen Dichte

$$\mathfrak{L}' \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \sqrt{|g|} \tag{1, 4}$$

ableiten, wo die Komponenten der beiden MINKOWSKIschen Feldtensoren $F_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}$ durch

$$\mathfrak{E} \overset{\text{def}}{=} \{F_{10}, F_{20}, F_{30}\}, \quad \mathfrak{B} \overset{\text{def}}{=} \{F_{23}, F_{31}, F_{12}\}$$

bzw.

$$\mathfrak{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{G_{10}, G_{20}, G_{30}\}, \quad \mathfrak{H} \stackrel{\text{def}}{=} \{G_{23}, G_{31}, G_{12}\}$$

festgestellt sind.

Die Komponenten des Feldtensors $F_{\mu\nu}$ lassen sich mit Hilfe des Viererpotentials $\Phi_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \{-\varphi, \mathfrak{A}\}$ (wo φ das Skalarpotential und $\mathfrak{A}$ das Vektorpotential bedeutet) folgenderweise angeben:

$$F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu .$$

Auf Grund dieser Definition kann man bekannterweise beweisen, dass die Komponenten von $F_{\mu\nu}$ der Identität

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \tag{1,5}$$

genügen; diese Identität liefert die zweite Gruppe der MAXWELLschen Gleichungen in Dielektriken.

Die LAGRANGEsche Funktion

$$L' = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \mathfrak{L}', \tag{1,6}$$

die mit Hilfe der dreidimensionalen Schreibweise in der Form

$$L' = \frac{1}{2} \{\mathfrak{H}\mathfrak{B} - \mathfrak{D}\mathfrak{E}\}$$

geschrieben werden kann, lässt sich durch unmittelbare Verallgemeinerung von der LAGRANGEschen Funktion des Vakuums

$$L_0 = \frac{1}{2} \{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2\}$$

herleiten. Es ist unzweifelhaft, dass diese Verallgemeinerung sehr handgreiflich und allgemein akzeptiert ist, doch besitzt diese Verallgemeinerung vom physikalischen Standpunkte aus eine wesenliche Mangelhaftigkeit. Es lässt sich nämlich der Sachverhalt, nach welchem das elektromagnetische Feld in Dielektriken kein abgeschlossenes System ist, durch die LAGRANGEsche Funktion (1, 6) bzw. durch die LAGRANGEsche Dichte (1, 4) nicht unmissverständlich ausdrücken. *Um diese Mangelhaftigkeit bei der Begründung der Theorie vermeiden zu können, wollen wir die* LAGRANGE*sche Funktion des Feldes aus zwei Teilen derart zusammensätzen, dass der erste für das Feld an sich und der zweite für die Wechselwirkung des Feldes mit den Polarisationsströmen in Dielektriken verantwortlich sei.*

Der Wechselwirkungsanteil der LAGRANGEschen Dichte lässt sich folgenderweise angeben. Es ist bekannt, dass dieser Wechselwirkungsanteil zwischen dem Feld und den Strömen in Vakuum in der Form

$$L_w = \frac{1}{2} \Phi_\mu \mathfrak{s}^\mu$$

angegeben werden kann, wo $\mathfrak{s}^\mu$ (dessen Komponenten *per definitionem* kontravariante Vektorendichten sind) die Viererstromdichte bedeutet. Um die kontravarianten Komponenten der Polarisationsviererstromdichte definieren zu können, führen wir den Polarisationstensor $M_{\mu\nu}$ mit den Komponenten

$$\mathfrak{P} \overset{\text{def}}{=} \{M_{01}, M_{02}, M_{03}\}, \quad \mathfrak{M} \overset{\text{def}}{=} \{M_{23}, M_{31}, M_{12}\}$$

ein, wo $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{M}$ die Komponenten der elektrischen Polarisation bzw. der Magnetisierung des Dielektrikums bedeuten.

Es ist bekannt, dass der Polarisationstensor gewöhnlich durch die Gleichungen

$$G_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} F_{\mu\nu} - M_{\mu\nu}$$

definiert wird. Mit Hinsicht auf den bekannten Zusammenhang zwischen den beiden MINKOWSKIschen Feldtensoren $F_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}$, welcher mit Hilfe der sog. Materialgleichungen

$$G_{\mu\nu} v^{\nu} = \varepsilon F_{\mu\nu} v^{\nu},$$

$$G_{\mu\nu} v_{\lambda} + G_{\nu\lambda} v_{\mu} + G_{\lambda\mu} v_{\nu} = \frac{1}{\mu} \{F_{\mu\nu} v_{\lambda} + F_{\nu\lambda} v_{\mu} + F_{\lambda\mu} v_{\nu}\}$$

(wo v^{μ} die Vierergeschwindigkeit des Dielektrikums, ε die Dielektrizitätskonstante und μ die magnetische Permeabilität bedeuten) in der Form

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu} \{F_{\mu\nu} + (\varepsilon\mu - 1)(F_{\mu} v_{\nu} - F_{\nu} v_{\mu})\}$$

angegeben werden kann, wo

$$F_{\mu} \overset{\text{def}}{=} F_{\mu\nu} v^{\nu}$$

und

$$v_{\mu} v^{\mu} = 1$$

sind (die Lichtgeschwindigkeit wird als Geschwindigkeitseinheit eingeführt), lässt sich der Polarisationstensor mit Hilfe des Feldtensors $F_{\mu\nu}$ bzw. mit Hilfe der Dielektrizitätskonstante ε und der magnetischen Permeabilität μ bzw. der Vierergeschwindigkeit des Dielektrikums v^{μ} in der Form

$$M_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) F_{\mu\nu} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu} (F_{\mu} v_{\nu} - F_{\nu} v_{\mu}) \tag{1, 7}$$

ausdrücken.

Mit Hilfe des Polarisationstensors lässt sich der gesuchte Wechselwirkungsanteil in der Form

$$\mathfrak{L}_{w} = \frac{1}{2} \Phi_{\mu} \partial_{\nu} (M^{\mu\nu} \sqrt{|g|})$$

angeben.

Wir werden also unsere nachfolgenden Überlegungen auf die LAGRANGE*sche Dichte*

$$\mathfrak{L} \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{|g|} + \frac{1}{2} \Phi_{\mu} \partial_{\nu} (M^{\mu\nu} \sqrt{|g|}) \tag{1, 8}$$

oder auf die LAGRANGE*sche Funktion*

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \Phi_\mu \partial_\nu (M^{\mu\nu} \sqrt{|g|}) \tag{1, 9}$$

$$\equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \Phi_\mu \nabla_\nu M^{\mu\nu}$$

gründen.

Es lässt sich gleich zeigen, dass die beiden LAGRANGEschen Funktionen (1, 6) bzw. (1, 9) vom Standpunkt der Feldgleichungen aus äquivalent und auch für die weiteren Untersuchungen vollkommen geeignet sind.

§ 2. *Die Ableitung der Feldgleichungen*

Zunächst wollen wir darauf hinweisen, dass sich die beiden LAGRANGEschen Dichten (1, 4) und (1, 8) nur in einer Divergenz einer Vektorendichte unterscheiden:

$$\mathfrak{L}' - \mathfrak{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu (\Phi_\nu M^{\mu\nu} \sqrt{|g|})$$

d. h., da sich dieser Unterschied in dem Wirkungsintegral des Feldes

$$I \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathfrak{L}\, d^4 x \tag{2, 1}$$

zum Verschwinden bringen lässt, das Variationsprinzip (1, 3) führt im Falle der beiden LAGRANGEschen Dichten zu den Feldgleichungen (1, 1).

Die Feldgleichungen lassen sich natürlich auch unmittelbar von der allgemeinen Formel [5]

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} - \nabla_\nu \left[\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu|\nu}} - \nabla_\lambda \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu|\nu\lambda}} \right] = 0, \tag{2, 2}$$

oder im pseudoeuklidischen Raum von

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu(\nu)}} + \partial_\nu \partial_\lambda \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu(\nu\lambda)}} = 0 \tag{2, 3}$$

ableiten, wo

$$\Phi_{\mu|\alpha} \overset{\text{def}}{=} \nabla_\alpha \Phi_\mu \quad \text{bzw.} \quad \Phi_{\mu(\alpha)} \overset{\text{def}}{=} \partial_\alpha \Phi_\mu$$

sind.

§ 3. *Die Erhaltungssätze*

Das Wirkungsintegral (2, 1) ist eine Integralinvariante, d. h. I bleibt bei der Durchführung jeder Koordinatentransformation — natürlich auch bei der infinitesimalen Koordinatentransformation

$$x^{\mu'} = x^\mu + \Theta \xi^\mu (x) \tag{3, 1}$$

(wo $\xi^{\mu}(x)$ die kontravarianten Komponenten eines beliebigen Vierervektors bedeuten, welche am Rand des Integrationsgebietes Ω verschwinden sollen, und Θ einen infinitesimalen Parameter bezeichnet) — unverändert, d. h.

$$\delta I \equiv 0 \tag{3, 2}$$

ist, wo δI die sogenannte totale Variation

$$\delta I \stackrel{\text{def}}{=} I'(x') - I(x)$$

bedeutet. Durch bekannte Umformungen lässt sich zeigen [3], dass unsere Gleichung (3, 2) auch in der Form

$$\int\limits_{\Omega} \delta^* \mathfrak{L}\, d^4 x = 0 \tag{3, 3}$$

geschrieben werden kann, wo $\delta^* \mathfrak{L}$ die sogenannte lokale Variation von $\mathfrak{L}$,

$$\delta^* \mathfrak{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{L}'(x) - \mathfrak{L}(x), \tag{3, 4}$$

bezeichnet.

Um $\delta^* \mathfrak{L}$ berechnen zu können, müssen wir in Betracht ziehen, dass $\mathfrak{L}$ von den kontravarianten Komponenten des metrischen Grundtensors des Raumes $g^{\mu\nu}$ und von ihren ersten partiellen Ableitungen $g^{\mu\nu}_{\cdot\cdot(\alpha)}$ ($g^{\mu\nu}_{\cdot\cdot(\alpha)} = \partial_\alpha g^{\mu\nu}$), von den Komponenten des Viererpotentials Φ_μ und von seinen ersten und zweiten kovarianten Ableitungen $\Phi_{\mu|\nu}$ bzw. $\Phi_{\mu|\nu\lambda}$ ($\Phi_{\mu|\nu} = \nabla_\nu \Phi_\mu$ bzw. $\Phi_{\mu|\nu\lambda} = \nabla_\nu \nabla_\lambda \Phi_\mu$), von den beiden Skalaren $\varepsilon = \varepsilon(x)$ bzw. $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}(x)$ und von ihren ersten partiellen Ableitungen $\varepsilon_{(\alpha)}$ bzw. $\left(\frac{1}{\mu}\right)_{(\alpha)}$ $\left(\varepsilon_{(\alpha)} = \partial_\alpha \varepsilon,\ \left(\frac{1}{\mu}\right)_{(\alpha)} = \partial_\alpha \left(\frac{1}{\mu}\right)\right)$ und von der Geschwindigkeit des Dielektrikums $v^\mu = v^\mu(x, g^{\varrho\sigma})$ und von ihren ersten kovarianten Ableitungen $v^{\mu}_{\cdot|\alpha}$ ($v^{\mu}_{\cdot|\alpha} = \nabla_\alpha v^\mu$) abhängt, d. h.

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\left(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_{\cdot\cdot(\alpha)}, \Phi_\mu, \Phi_{\mu|\alpha}, \Phi_{\mu|\alpha\beta}, \varepsilon, \varepsilon_{(\alpha)}, \frac{1}{\mu}, \left(\frac{1}{\mu}\right)_{(\alpha)}, v^\mu, v^{\mu}_{\cdot|\alpha}\right)$$

ist. Durch Ausführen der lokalen Variation und nach einigen partiellen Integrationen lässt sich unsere Gleichung (3, 3) in der Form

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \Bigg\{ & -\frac{1}{2} T_{\mu\nu} \delta^* g^{\mu\nu} + \left[\frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} - \nabla_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu|\nu}} - \nabla_\lambda \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu|\nu\lambda}}\right)\right] \delta^* \Phi_\mu \\ & + \left[\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{(\alpha)}}\right] \delta^* \varepsilon + \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{1}{\mu}\right)} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{1}{\mu}\right)_{(\alpha)}}\right] \delta^* \left(\frac{1}{\mu}\right) \\ & + \left[\frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \nabla_\alpha \frac{\partial L}{\partial v^{\mu}_{\cdot|\alpha}}\right] \delta'^* v^\mu \Bigg\} \sqrt{|g|}\, d^4 x = 0 \end{aligned} \tag{3, 5}$$

schreiben, wo

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\left\{\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\nu\mu}}\right) - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\cdot\cdot(\alpha)}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\nu\mu}_{\cdot\cdot(\alpha)}}\right)\right.$$
$$\left. + \left\{ {\tau \atop \alpha \cdot \tau} \right\} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\cdot\cdot(\alpha)}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\nu\mu}_{\cdot\cdot(\alpha)}}\right)\right\} \equiv L g_{\mu\nu} - \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g^{\nu\mu}}\right) \tag{3, 6}$$
$$+ \partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{\cdot\cdot(\alpha)}} + \frac{\partial L}{\partial g^{\nu\mu}_{\cdot\cdot(\alpha)}}\right) + \left\{ {\tau \atop \alpha \cdot \tau} \right\} \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{\cdot\cdot(\alpha)}} + \frac{\partial L}{\partial g^{\nu\mu}_{\cdot\cdot(\alpha)}}\right)$$

und

$$\delta'^* v^\mu \overset{\text{def}}{=} \delta^* v^\mu - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^\mu}{\partial g^{\varrho\sigma}} + \frac{\partial v^\mu}{\partial g^{\sigma\varrho}}\right) \delta^* g^{\varrho\sigma}$$

sind. Hier haben wir berücksichtigt, dass bei der Berechnung von $T_{\mu\nu}$ schon die Abhängigkeit der Vierergeschwindigkeit des Dielektrikums

$$v^\mu = \frac{\dfrac{dx^\mu}{dt}}{\sqrt{g_{\alpha\beta}(x)\dfrac{dx^\alpha}{dt}\dfrac{dx^\beta}{dt}}}$$

von den Komponenten des metrischen Grundtensors $g^{\alpha\beta}$ in Betracht gezogen war (wo t einen beliebigen Parameter bedeutet). Aus

$$\delta^* g^{\varrho\sigma} = -\Theta\{(\partial_\lambda g^{\varrho\sigma})\xi^\lambda - (\partial_\lambda \xi^\varrho) g^{\lambda\sigma} - (\partial_\lambda \xi^\sigma) g^{\varrho\lambda}\} + O(\Theta^2) \tag{3, 7}$$

und

$$\partial_\lambda v^\mu = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^\mu}{\partial g^{\varrho\sigma}} + \frac{\partial v^\mu}{\partial g^{\sigma\varrho}}\right)(\partial_\lambda g^{\varrho\sigma})$$

ergibt sich

$$\delta'^* v^\mu = \Theta\left\{\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\varrho} v^\varrho - v^\mu v_\varrho v^\lambda (\partial_\lambda \xi^\varrho)\right\}. \tag{3, 8}$$

Auf Grund von (3, 7), (3, 8) bzw. von

$$\delta^* \varepsilon = -\Theta(\partial_\lambda \varepsilon)\xi^\lambda + O(\Theta^2), \quad \delta^*\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\Theta\left(\partial_\lambda\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)\xi^\lambda + O(\Theta^2)$$

kann die Gleichung (3, 5) nach partiellen Integrationen in der Form

$$\int\limits_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\mathfrak{T}_{\mu\nu}(\partial_\lambda g^{\mu\nu}) + \partial_\mu \mathfrak{T}_\lambda{}^\mu_\cdot - \sqrt{|g|}\left[\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{(\alpha)}}\right]\partial_\lambda \varepsilon \right.$$
$$- \sqrt{|g|}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{1}{\mu}\right)} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{1}{\mu}\right)_{(\alpha)}}\right]\partial_\lambda\left(\frac{1}{\mu}\right) - \partial_\varrho\left[\sqrt{|g|}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\lambda} - \nabla_\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\lambda_{\cdot|\alpha}}\right)v^\varrho\right.$$
$$\left.\left. - \sqrt{|g|}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \nabla_\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\mu_{\cdot|\alpha}}\right) v^\mu v_\lambda v^\varrho\right]\right\} \xi^\lambda \, d^4 x = 0$$

geschrieben werden. Diese Gleichung soll für beliebige ξ^λ und für beliebige Wahl des Integrationsgebietes Ω identisch erfüllt werden. So bekommen wir die wichtigen Identitäten

$$\frac{1}{2}\mathfrak{T}_{\mu\nu}(\partial_\lambda g^{\mu\nu}) + \partial_\mu \mathfrak{T}_\lambda{}^\mu - \sqrt{|g|}\left[\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{(\alpha)}}\right]\partial_\lambda \varepsilon$$
$$-\sqrt{|g|}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)_{(\alpha)}}\right]\partial_\lambda\left(\frac{1}{\mu}\right) - \partial_\varrho\left[\sqrt{|g|}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\lambda}\right) - \nabla_\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\lambda{}_{|\alpha}}\right) v^\varrho \tag{3, 9}$$
$$-\sqrt{|g|}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \nabla_\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\mu{}_{|\alpha}}\right) v^\mu v_\lambda v^\varrho\Bigg] = 0$$

oder in dem pseudoeuklidischen Raum

$$\partial_\mu T_\lambda{}^\mu - \left[\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{(\alpha)}}\right]\partial_\lambda \varepsilon - \left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)_{(\alpha)}}\right]\partial_\lambda\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{3, 10}$$
$$-\partial_\varrho\left[\left(\frac{\partial L}{\partial v^\lambda} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\lambda{}_{(\alpha)}}\right) v^\varrho - \left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\mu{}_{(\alpha)}}\right) v^\mu v_\lambda v^\varrho\right] = 0,$$

wo

$$T_\lambda{}^\mu \overset{\text{def}}{=} (T_\lambda{}^\mu)_{g^{\varrho\sigma}=\gamma^{\varrho\sigma}}$$

bezeichnet. *Diese Identitäten liefern für uns die gesuchten Erhaltungssätze.*

§ 4. *Diskussionen*

Durch ausführliche, aber elementare Rechnungen erhalten wir auf Grund unserer LAGRANGEschen Funktion (1, 9) für $T_{\mu\nu}$ den bekannten ABRAHAMschen Energie-Impulstensor des Feldes, welcher sich in der Form

$$\underset{(A)}{T_{\mu\nu}} = \underset{(M)}{T_{\mu\nu}} + T^*_{\mu\nu} \tag{4, 1}$$

schreiben lässt, wo

$$\underset{(M)}{T_{\mu\nu}} \overset{\text{def}}{=} F_{\mu\varrho} G_\nu{}^\varrho - \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu} F_{\varrho\sigma} F^{\varrho\sigma} \tag{4, 2}$$

den MINKOWSKIschen Energie-Impulstensor bedeutet und

$$T^*_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu}\left[F_{\mu\varrho} F^\varrho v_\nu + F_\varrho F^\varrho v_\mu v_\nu\right] \tag{4, 3}$$

ist.

Mit Hilfe dieser Tensoren kann man unsere Erhaltungssätze entweder in der Form

$$\partial_\varrho \underset{(A)}{T_\lambda{}^\varrho} + \frac{1}{2} F_\varrho F^\varrho (\partial_\lambda \varepsilon) + \frac{1}{4}\left[F_{\varrho\sigma} F^{\varrho\sigma} - 2F_\varrho F^\varrho\right]\partial_\lambda\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{4, 4}$$
$$-\partial_\varrho\left[\frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu}\left(F_{\lambda\alpha} F^\alpha v^\varrho + F_\alpha F^\alpha v_\lambda v^\varrho\right)\right] = 0$$

oder in der Form

$$\underset{(M)}{\partial_\varrho T_\lambda^{\;\varrho}} + \frac{1}{2} F_\varrho F^\varrho (\partial_\lambda \varepsilon) + \frac{1}{4} [F_{\varrho\sigma} F^{\varrho\sigma} - 2 F_\varrho F^\varrho] \, \partial_\lambda \left(\frac{1}{\mu} \right) = 0 \qquad (4, 5)$$

schreiben. Durch unmittelbare Rechnung lässt sich beweisen, dass die beiden Gleichungen, wenn $F_{\mu\nu}$ bzw. $G_{\mu\nu}$ den Feldgleichungen (1, 2) bzw. (1, 5) genügen, identisch erfüllt sind. Genauerweise bekommen wir, dass

$$F_{\lambda\varrho} \, \partial_\mu G^{\mu\varrho} = - F_{\lambda\varrho} \, \partial_\mu M^{\varrho\mu}$$

bzw.

$$\partial_\mu \overset{(0)}{T_\lambda^{\;\mu}} = - F_{\lambda\varrho} \, \partial_\mu M^{\varrho\mu} \qquad (4, 6)$$

bestehen, wo

$$\overset{(0)}{T_{\lambda\varrho}} = F_{\lambda\alpha} F_\varrho^{\;\alpha} - \frac{1}{4} \gamma_{\lambda\varrho} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

den Energie-Impulstensor des in Dielektrikum erregten elektromagnetischen Feldes an sich bezeichnet.

Die Gleichung (4, 6) lässt sich folgenderweise interpretieren:

Durch das elektromagnetische Feld an sich, welches in einem Dielektrikum kein abgeschlossenes System ist, werden Polarisationsströme induziert. Deswegen wird die Divergenz des Energie-Impulstensors, welche bekannterweise die ponderomotorische Kraftdichte des Feldes liefert, nicht verschwinden, sondern gibt die auf die Polarisationsströme wirkende LORENTZ*sche Kraftdichte an.* Das ist in vollkommenster Übereinstimmung mit unseren Überlegungen, mit deren Hilfe wir die LAGRANGEsche Dichte des Feldes begründet haben.

Weiterhin zeigen unsere Gleichungen (4, 4) und (4, 5), dass *die richtigen Erhaltungssätze sowohl durch den* ABRAHAM*schen als durch den* MINKOWSKI*schen Tensor erfüllt sind.* Das bedeutet — im Gegensatz zu den Behauptungen von mehreren Autoren, die laut der expliziten Form der ponderomotorischen Kräfte auf die exklusive Richtigkeit des ABRAHAMschen Tensors hingewiesen haben [1], [4], [7], [8], [9] — dass sich allein auf Grund der Erhaltungssätze nicht entscheiden lässt, ob der ABRAHAMsche oder der MINKOWSKIsche Tensor als richtiger Energie-Impulstensor des Feldes betrachtet werden kann.

Es ist ja bekannt, dass der MINKOWSKIsche Energie-Impulstensor, obwohl er die Identität (4, 5) erfüllt, kein symmetrischer Tensor ist, weswegen die wichtige Identität von PLANCK

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}$$

(wo $\mathfrak{G}$ den Impuls und $\mathfrak{S}$ den Poyntingschen Vektor des Feldes bezeichnen) nicht besteht, was damit zusammenhängt, dass das elektromagnetische Feld in Dielektriken kein abgeschlossenes System ist [12]. Um das Feld zu einem abgeschlossenen System zu ergänzen, haben wir das sog. Radiationsfeld einzuführen, dessen Energie-Impulstensor von F. BECK [2] angegeben wurde.

Merkwürdigerweise wird das PLANCKsche Kriterium durch den ABRAHAMschen Energie-Impulstensor befriedigt, doch lässt sich zeigen, dass dieser Tensor nicht als richtiger Energie-Impulstensor des abgeschlossenen Systems betrachtet werden kann, da er das ebenso wichtige Radiationskriterium von M. v. LAUE [6] nicht befriedigt. Um das Akzeptierbarkeit des ABRAHAMschen Tensorsretten zu können, haben G. MARX und G. GYÖRGYI [7] bzw. G. MARX und K. NAGY [8] darauf hingewiesen, dass sich dieser Energie-Impulstensor zu dem Energie-Impulstensor des Radiationsfeldes

$$S_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{(A)}{T_{\mu\nu}} - \frac{n^2-1}{n^2} (g_{\mu\varrho} - v_\mu v_\varrho)(g_{\nu\sigma} - v_\nu v_\sigma) \underset{(A)}{T^{\varrho\sigma}} \tag{4, 7}$$

ergänzen lässt, durch welchen Tensor die beiden Kriterien schon befriedigt sind.

In Zusammenhang mit diesen beiden Untersuchungen wollen wir aber zuerst darauf hinweisen, dass sich $S_{\mu\nu}$, wegen

$$(g_{\mu\varrho} - v_\mu v_\varrho)(g_{\nu\sigma} - v_\nu v_\sigma) T^{*\varrho\sigma} \equiv 0,$$

auch in der Form

$$S_{\mu\nu} = \underset{(M)}{T_{\mu\nu}} + T^*_{\mu\nu} - \frac{n^2-1}{n^2} (g_{\mu\varrho} - v_\mu v_\varrho)(g_{\nu\sigma} - v_\nu v_\sigma) \underset{(M)}{T^{\varrho\sigma}}$$

schreiben lässt.

Weiterhin ist es bekannt, dass sich $T^*_{\mu\nu}$ auf Grund der Forderung, dass der Impulsmomenttensor

$$\Theta_{\lambda\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} x_\lambda T_{\mu\nu} - x_\mu T_{\lambda\nu}$$

divergenzfrei sein soll, ableiten lässt. Um das zu beweisen, kann man dieselbe Methode benutzen, mit deren Hilfe G. MARX und seine Mitarbeiter $S_{\mu\nu}$ von dem ABRAHAMschen Tensor abgeleitet haben. Das bedeutet aber schliesslich, dass auch der Tensor $S_{\mu\nu}$ dem MINKOWSKIschen Tensor, aber in zwei Schritten, entspringt.

Diese umständliche Methode wäre also nur dann gerechtfertigt, wenn es möglich wäre auch weitere entscheidende Beweisgründe neben dem ABRAHAMschen Energie-Impulstensor vorzubringen. Jüngst sind aber von A. RUBINOWICZ [11] weitere interessante Argumente neben dem MINKOWSKIschen Tensor vorgebracht worden.

Schliesslich wollen wir noch darauf hinweisen, dass es noch nicht gelungen ist und wegen der Verschiedenheit der beiden Konstruktionen auch hoffnungslos zu sein scheint, expliziter Weise beweisen zu können, dass der totale Energie-Impulstensor (4, 7) des Radiationsfeldes mit dem BECKschen identisch ist, doch ist es nicht zweifelhaft, dass die beiden von physikalischem Standpunkte aus äquivalent sind. Das bedeutet aber, dass sich der Energie-Impulstensor des nicht-abgeschlossenen Feldes in seiner einfachsten Form folgenderweise definieren lässt:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = \Big\{ & L g_{\mu\nu} - \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g^{\nu\mu}} \right) \\ & + \partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{\cdot\cdot(\alpha)}} + \frac{\partial L}{\partial g^{\nu\mu}_{\cdot\cdot(\alpha)}} \right) + \left\{ {\tau \atop \alpha \cdot \tau} \right\} \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{\cdot\cdot(\alpha)}} + \frac{\partial L}{\partial g^{\nu\mu}_{\cdot\cdot(\alpha)}} \right) \\ & - \left[\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \nabla_\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\mu_{\cdot|\alpha}} \right) v_\nu - \left(\frac{\partial L}{\partial v^\varrho} - \nabla_\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\varrho_{\cdot|\alpha}} \right) v^\varrho v_\mu v_\nu \right] \Big\}_{g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}}, \end{aligned}$$

welcher mit dem Energie-Impulstensor von MINKOWSKI übereinstimmt.

Literatur

[1] *Balázs, N. L.:* Phys. Rev., **91**, 408 (1953).
[2] *Beck, F.:* Z. Phys., **134**, 580 (1953).
[3] *Corson, E. M.:* Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations, Blackie and Ltd., London, 1953.
[4] *Györgyi, G.:* Acta Phys. Acad. Sci. Hung., **4**, 121 (1954).
[5] *Horváth, J. I.:* Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, **2**, 447 (1956).
[6] *Laue, M. v.:* Z. Phys., **128**, 387 (1950).
[7] *Marx, G., G. Györgyi:* Acta Phys. Acad. Sci. Hung., **3**, 213 (1954).
[8] *Marx, G., K. Nagy:* Acta Phys. Acad. Sci. Hung., **4**, 217 (1955).
[9] *Novobátzky, K. F.:* Hung. Acta Phys., **1**, No 5, 23 (1949).
[10] *Pauli, W.:* Relativitätstheorie, Enc. d. Math. Wiss. B. V/2, Teubner, Leipzig, 1922.
[11] *Rubinowicz, A.:* Acta Phys. Polonica, **14**, 225 (1955).
[12] *Tamm, J.:* Journ. of Phys. USSR., **1**, 439 (1939).